Pour partir sur de bonnes bases...
Polynômes du second degré

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

16 septembre 2015

Généralités

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, ..., a_n sont des réels donnés.

Généralités

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, …, a_n sont des réels donnés.

Exemples

$x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme.

$x \mapsto \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$ n'est pas un polynôme.

$x \mapsto x^3 - 4\sqrt{x} + 2$ n'est pas un polynôme.

Propriétés

Propriétés admises

1. Soit P le polynôme défini par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
P est le polynôme nul $\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

2. Soient P et Q les polynômes définis par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et
$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \iff \left\{ \begin{array}{l} n = p \\ a_0 = b_0 \,;\; a_1 = b_1 \,;\; \cdots \; a_n = b_n \end{array} \right.$$

Propriétés

Propriétés admises

1. Soit P le polynôme défini par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
P est le polynôme nul $\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.
2. Soient P et Q les polynômes définis par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et
$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \iff \begin{cases} n = p \\ a_0 = b_0\,;\ a_1 = b_1\,;\ \cdots\ a_n = b_n \end{cases}$$

Conséquence

L'écriture d'un polynôme est unique.

Degré d'un polynôme

Définition

Soit P un polynôme défini par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Le nombre n est appelé degré de P.

Degré d'un polynôme

Définition

Soit P un polynôme défini par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Le nombre n est appelé degré de P.

Exemple

$x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme de degré 3.
$x \mapsto 3x - x^5$ est un polynôme de degré 5.

Racines d'une fonction

Définition

Soit f une fonction. On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Racines d'une fonction

Définition

Soit f une fonction. On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple

1 est une racine de $x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$.
0 est une racine de $x \mapsto 3x - x^5$.

Forme canonique

Dans toute la suite, P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Forme canonique

Dans toute la suite, P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Propriété et définition

Il existe des réels α et β tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left((x+\alpha)^2 + \beta\right).$$

Cette écriture est appelée forme canonique de P.

Forme canonique

Dans toute la suite, P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Propriété et définition

Il existe des réels α et β tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left((x+\alpha)^2 + \beta\right).$$

Cette écriture est appelée forme canonique de P.

Remarque

On appelle parfois forme canonique l'écriture de P sous la forme

$$P(x) = a(x+\alpha)^2 + \gamma$$

Forme canonique

Démonstration

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Forme canonique

Démonstration

$$\begin{aligned}
P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice

Écrire la forme canonique du polynôme défini par $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

Discriminant

Définition

On appelle discriminant de P le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$, où P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Discriminant

Définition

On appelle discriminant de P le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$, où P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Exemple

Calculer le discriminant du polynôme défini par
$P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

Discriminant

Définition

On appelle discriminant de P le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$, où P désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Exemple

Calculer le discriminant du polynôme défini par
$P(x) = 2x^2 + 4x + 6$.
$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32$

Racines d'un polynôme du second degré

Les racines de P peuvent être déterminées de la façon suivante :

- Si $\Delta < 0$ alors P n'a pas de racine réelle.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle : $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles :

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Racines : démonstration

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- Si $\Delta < 0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \neq 0$.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $P(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$.

Racines : démonstration

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- Si $\Delta > 0$ alors
  $$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
  donc
  $$P(x) = 0 \iff x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Application

Exercice

Déterminer les racines de P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad \text{et} \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Application

Exercice

Déterminer les racines de P et Q définis par

$$P(x) = 2x^2 + 4x + 6 \quad \text{et} \quad Q(x) = -x^2 - 2x + 1$$

Solution

Pour P : $\Delta = -32 < 0$ donc P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.
Pour Q : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$ donc Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$$

Liens entre coefficients et racines

Propriétés

Si P admet deux racines x_1 et x_2 alors $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Liens entre coefficients et racines

Propriétés

Si P admet deux racines x_1 et x_2 alors $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Démonstration

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Liens entre coefficients et racines

Exercice

Déterminer deux nombres ayant pour somme 1 et pour produit -182.

Exercice

Déterminer deux nombres ayant pour somme 1 et pour produit -182.

Solution

-13 et 14

Liens entre coefficients et racines

Exercice

Déterminer sans calculer le discriminant les racines de P défini par

$$P(x) = x^2 - 5x + 4$$

Liens entre coefficients et racines

Exercice

Déterminer sans calculer le discriminant les racines de P défini par

$$P(x) = x^2 - 5x + 4$$

Solution

1 est racine évidente.
On pose $x_1 = 1$, de $x_1 \times x_2 = 4$ on en déduit la deuxième racine $x_2 = 4$.
On aurait pu utiliser le fait que $x_1 + x_2 = 5$.

Liens entre coefficients et racines

Propriétés

- Si $\Delta < 0$ alors P ne peut pas être factorisé.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de P.

Signe de P

Propriétés (avec x_1 et x_2 les racines de P et $x_1 < x_2$)

- Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	Signe de a

Signe de P

Propriétés (avec x_1 et x_2 les racines de P et $x_1 < x_2$)

- Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $P(x)$	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

Signe de P

Propriétés (avec x_1 et x_2 les racines de P et $x_1 < x_2$)

- Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $P(x)$	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

- Si $\Delta > 0$ alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\text{sgn}(P(x))$		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

Signe de P : démonstration

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ et $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a.

Signe de P : démonstration

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est du signe de a.

Signe de P : démonstration

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

Signe de P : démonstration

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

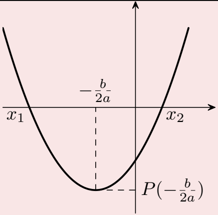
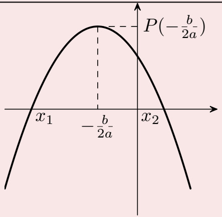
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$\operatorname{sgn}(a)$		$\operatorname{sgn}(a)$		$\operatorname{sgn}(a)$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\operatorname{sgn}(P(x))$		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(-a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

Représentation graphique

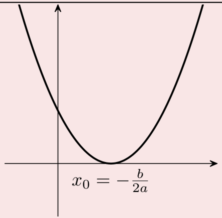
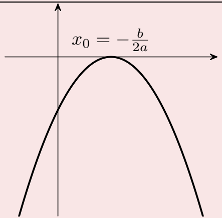
Propriétés

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan.
La représentation graphique de P est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \mapsto ax^2$.
C'est donc une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; P(-\frac{b}{2a})\right)$.

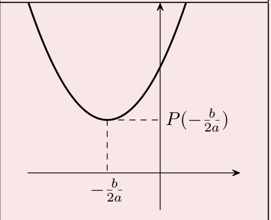
Résumons la situation pour $\Delta > 0$

Factorisation de $P(x)$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
Équation $P(x) = 0$	2 solutions x_1 et x_2
$a > 0$	
$a < 0$	

Résumons la situation pour $\Delta = 0$

Factorisation de $P(x)$	$a(x - x_0)^2$
Équation $P(x) = 0$	une solution x_0
$a > 0$	
$a < 0$	

Résumons la situation pour $\Delta < 0$

Factorisation de $P(x)$	pas de factorisation
Équation $P(x) = 0$	pas de solution
$a > 0$	
$a < 0$