Limites

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

7 octobre 2015

Limite finie d'une fonction en un réel

Définition

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a. Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

Limite finie d'une fonction en un réel

Définition

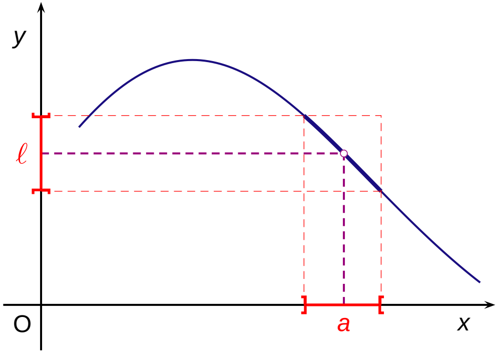
Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a. Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

Théorème : Fonction usuelle définie en a

Lorsque f est une fonction polynôme ou l'une des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x$ ou encore la somme, le produit, le quotient, la composée ou la valeur absolue de telles fonctions :
Si f **est définie en** a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$



Limite infinie d'une fonction en un réel

Définition

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a, à droite de a (resp. à gauche de a).
On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a si et seulement si :
pour tout intervalle $J =]\lambda; +\infty[$ (respectivement $]-\infty; \lambda[$) $\lambda \in \mathbb{R}$, tous les nombres $f(x)$ appartiennent à J dès que x est assez proche de a.

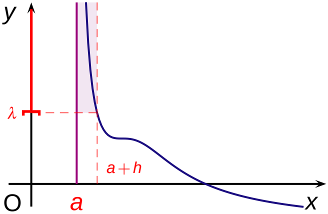
Limite infinie d'une fonction en un réel

Définition

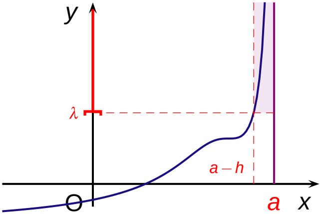
Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a, à droite de a (resp. à gauche de a).
On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a si et seulement si :
pour tout intervalle $J =]\lambda; +\infty[$ (respectivement $]-\infty; \lambda[$) $\lambda \in \mathbb{R}$, tous les nombres $f(x)$ appartiennent à J dès que x est assez proche de a.

On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$
(resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$).

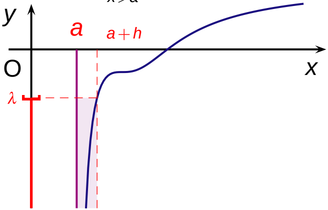
Limite infinie d'une fonction en un réel



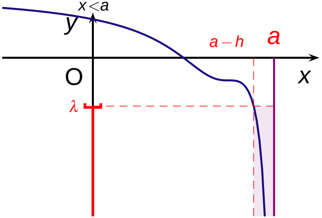
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$, on dit alors, que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe représentative de la fonction f.

Interprétation graphique

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$, on dit alors, que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple

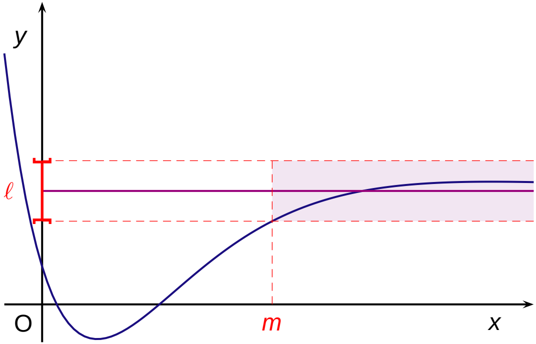
Le cas de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x-2}$ illustre parfaitement la définition, avec une asymptote d'équation $x = 2$.

Limite finie d'une fonction en l'infini : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$, où A est un réel.
Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Limite finie d'une fonction en l'infini : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

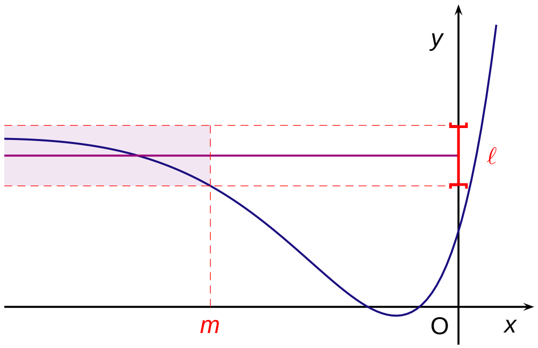


Limite finie d'une fonction en l'infini : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A]$, où A est un réel.
Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $-x$ suffisamment grand.
On note : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Limite finie d'une fonction en l'infini : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$



Interprétation graphique

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), on dit alors, que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote (horizontale) à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Interprétation graphique

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), on dit alors, que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote (horizontale) à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Remarque

Pour déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = \ell$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \ell$.

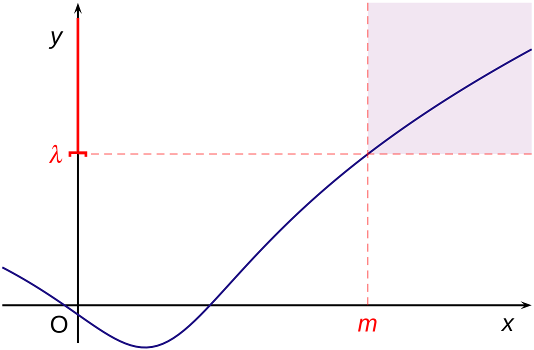
Limites infinies : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$

Définition

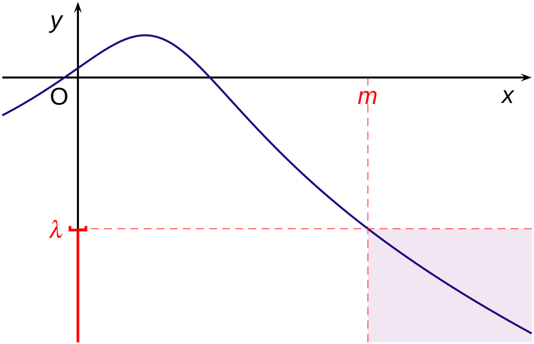
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$, où A est un réel.

1. On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si : pour tout intervalle $I =]\lambda; +\infty[$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, tous les nombres $f(x)$ sont dans l'intervalle I dès que x est assez grand.
2. On dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si : pour tout intervalle $I =]-\infty; \lambda[$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, tous les nombres $f(x)$ sont dans l'intervalle I dès que x est assez grand.

Limites infinies : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Limites infinies : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



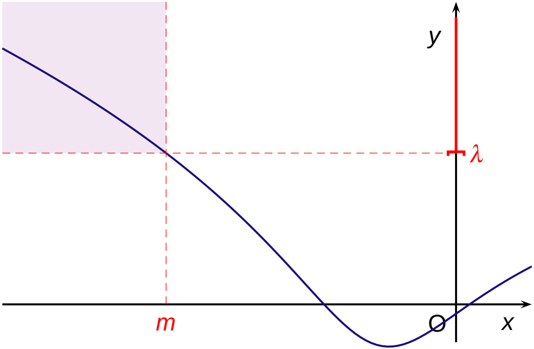
Limites infinies : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Définition

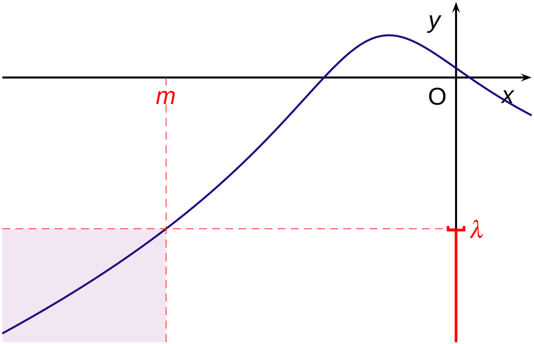
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A]$, où A est un réel.

1. On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si : pour tout intervalle $I =]\lambda; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), tous les nombres $f(x)$ sont dans l'intervalle I dès que $-x$ est assez grand.
2. On dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si : pour tout intervalle $I =]-\infty; \lambda[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), tous les nombres $f(x)$ sont dans l'intervalle I dès que $-x$ est assez grand.

Limites infinies : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Limites infinies : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Limites infinies : exemples

Exemples

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ pout tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair

Asymptote oblique

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

Asymptote oblique

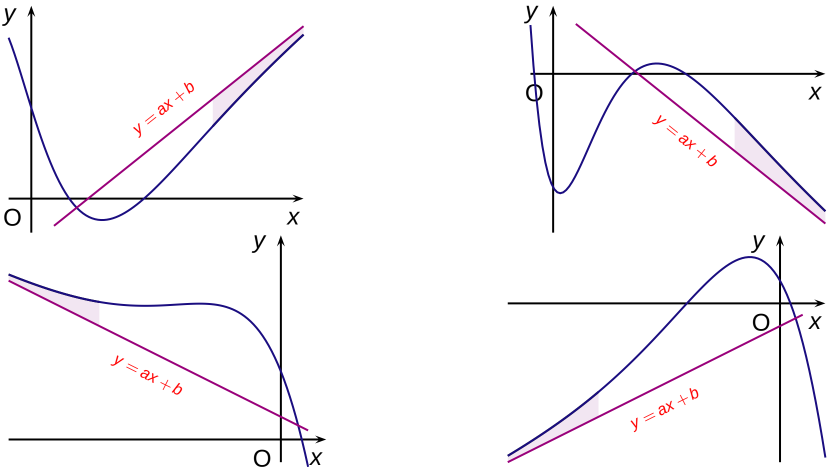
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

Remarque

Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$.

Représentation graphique



Opérations sur les limites : limite d'une somme

Dans tous les tableaux qui suivent, α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et ℓ et ℓ' désignent deux réels.
Les fonctions f et g considérées sont définies au voisinage de α.
Les limites de ces fonctions sont déterminées en α.

Opérations sur les limites : limite d'une somme

Dans tous les tableaux qui suivent, α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et ℓ et ℓ' désignent deux réels.
Les fonctions f et g considérées sont définies au voisinage de α.
Les limites de ces fonctions sont déterminées en α.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	$\ell\ell'$	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	?

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	$\ell\ell'$	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	?

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite en $+\infty$ de ax^n

On déduit du tableau que pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et que :

Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^n) = +\infty$ et si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^n) = -\infty$.

Limite d’un produit

Exercice

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$.

Limite d'un produit

Exercice

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, donc

Limite d'un produit

Exercice

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = -2 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exercice

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4$

Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4$

$x^3 + 2x^2 - 4 = x^3 \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^3} = 0$

Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4$

$x^3 + 2x^2 - 4 = x^3 \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^3} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4$

$x^3 + 2x^2 - 4 = x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4 = +\infty$.

Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4$

$x^3 + 2x^2 - 4 = x^3 \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^3} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4 = +\infty$.

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction **polynôme** est la limite de son terme de plus haut degré.

Limite d'un quotient

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite non nulle

f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	?

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du quotient qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'un quotient

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite non nulle

f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	?

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du quotient qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite nulle

f a pour limite	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
g a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Limite d'un quotient

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{4x-6}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$.

Limite d'un quotient

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ par : $f(x) = \frac{x^3}{4x-6}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$.

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} x^3 = \frac{27}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{3}{2}} 4x - 6 = 0.$$

Limite d'un quotient

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{4x-6}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} x^3 = \dfrac{27}{8}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} 4x - 6 = 0$.

Si $x > \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 > 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$

Limite d'un quotient

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ par : $f(x) = \frac{x^3}{4x-6}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} x^3 = \frac{27}{8}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} 4x - 6 = 0$.

Si $x > \frac{3}{2}$, alors $4x - 6 > 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$

Si $x < \frac{3}{2}$, alors $4x - 6 < 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} f(x) = -\infty$

Limite d'un quotient

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{4x-6}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} x^3 = \dfrac{27}{8}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} 4x - 6 = 0$.

Si $x > \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 > 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$

Si $x < \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 < 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentant f.

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

$$\frac{2x+4}{3x^2-5} = \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)} = \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{3-\dfrac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

$$\frac{2x+4}{3x^2-5} = \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)} = \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{3-\dfrac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

$$\frac{2x+4}{3x^2-5} = \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)} = \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{3-\dfrac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5} = 0$

Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

$$\frac{2x+4}{3x^2-5} = \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)} = \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{3-\dfrac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5} = 0$

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction **rationnelle** est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré.

Limite de la composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x appartenant à I, $u(x)$ appartient à J.
a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f est la fonction $v \circ u$, composée de u suivie de v.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{X \to b} v(X) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} f(x) = c$$

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\dfrac{2}{1 - x} \right)^2$.

Limite de la composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x appartenant à I, $u(x)$ appartient à J.
a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f est la fonction $v \circ u$, composée de u suivie de v.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{X \to b} v(X) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} f(x) = c$$

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\dfrac{2}{1-x} \right)^2$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{2}{1-x} = -\infty \text{ et } \lim_{X \to -\infty} X^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{2}{1-x} \right)^2 = +\infty$$

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.
Pour tout réel x positif, $9x^2+1 \geqslant 9x^2$

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.
Pour tout réel x positif, $9x^2 + 1 \geqslant 9x^2$
d'où pour tout réel x positif, $\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x$.

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.
Pour tout réel x positif, $9x^2+1 \geqslant 9x^2$
d'où pour tout réel x positif, $\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x$.
Ainsi sur l'intervalle $[0;+\infty[$, $\underbrace{\sqrt{9x^2+1} - x + 1}_{f(x)} \geqslant \underbrace{2x+1}_{g(x)}$

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.
Pour tout réel x positif, $9x^2+1 \geqslant 9x^2$
d'où pour tout réel x positif, $\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x$.
Ainsi sur l'intervalle $[0;+\infty[$, $\underbrace{\sqrt{9x^2+1} - x + 1}_{f(x)} \geqslant \underbrace{2x+1}_{g(x)}$

et $\lim\limits_{x\to\infty} 2x+1 = +\infty$ donc

Limite par comparaison

Théorème 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.
Pour tout réel x positif, $9x^2+1 \geqslant 9x^2$
d'où pour tout réel x positif, $\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x$.
Ainsi sur l'intervalle $[0;+\infty[$, $\underbrace{\sqrt{9x^2+1} - x + 1}_{f(x)} \geqslant \underbrace{2x+1}_{g(x)}$

et $\lim\limits_{x\to\infty} 2x+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1 = +\infty$.

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x + 1$.

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1$.
Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2$

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x + 1$.
Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2$
d'où pour tout réel $x \geqslant 1$, $\sqrt{x^2 - 1} \leqslant x$.

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1$.
Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2$
d'où pour tout réel $x \geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$.
Ainsi sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $\underbrace{\sqrt{x^2-1} - 2x + 1}_{f(x)} \leqslant \underbrace{-x+1}_{g(x)}$

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1$.
Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2$
d'où pour tout réel $x \geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$.
Ainsi sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $\underbrace{\sqrt{x^2-1} - 2x + 1}_{f(x)} \leqslant \underbrace{-x+1}_{g(x)}$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 1 = -\infty$ donc

Limite par comparaison

Théorème 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1$.
Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2$
d'où pour tout réel $x \geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$.
Ainsi sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $\underbrace{\sqrt{x^2-1} - 2x + 1}_{f(x)} \leqslant \underbrace{-x+1}_{g(x)}$ et

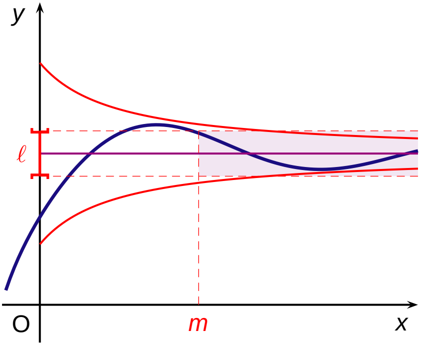
$\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1 = -\infty$.

Limite par comparaison

Théorème 3 : Théorème des gendarmes

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et ℓ un réel.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell$.

Théorème des gendarmes



Exemple

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout réel $x > 0$, $\quad 3+\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x^2+x+1}{x^2}$.

Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

Exemple

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout réel $x > 0$, $\qquad 3 + \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x^2+x+1}{x^2}$.

Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

- Pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 3 + \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 3 + \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Exemple

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout réel $x > 0$, $\qquad 3+\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x^2+x+1}{x^2}$.

Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

- Pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 3+\dfrac{1}{x}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3+\dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.
- Pour tout réel $x > 0$, $3+\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x^2+x+1}{x^2}$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3+\dfrac{1}{x} = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Le terme prépondérant

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 6\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Calcul pratique dans le cas de formes indéterminées

Le terme prépondérant

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 6\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

$f(x)$ présente une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$, on factorise donc par le terme prépondérant.

Le terme prépondérant

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 6\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

$f(x)$ présente une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$, on factorise donc par le terme prépondérant.

Si $x \neq 0$ on a :

$f(x) = x\left(1 - \dfrac{6}{\sqrt{x}}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right) = 1$.

D'où, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Calcul pratique dans le cas de formes indéterminées

L'expression conjuguée

Étudier la limite en 0 de : $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Calcul pratique dans le cas de formes indéterminées

L'expression conjuguée

Étudier la limite en 0 de : $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$g(x) = \dfrac{[\sqrt{x+4}-2][\sqrt{x+4}+2]}{x[\sqrt{x+4}+2]} = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$ (si $x \neq 0$).

Calcul pratique dans le cas de formes indéterminées

L'expression conjuguée

Étudier la limite en 0 de : $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$g(x) = \dfrac{[\sqrt{x+4}-2][\sqrt{x+4}+2]}{x[\sqrt{x+4}+2]} = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$ (si $x \neq 0$).

On en déduit que :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2}$$

soit

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{4}$$

Branches paraboliques

Si $M(x,f(x))$ est un point de $\mathscr{C}_f$, courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère, alors la droite (OM) a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(x)-0}{x-0}$$

Deux cas à remarquer :

1. Branche parabolique de direction (Oy) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

2. Branche parabolique de direction (Ox) :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$